**Примеры исследования сходимости несобственных интегралов**

**методическое пособие, 1 курс ф-т ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова**

Краткие теоретические сведения

**Опр** Пусть функция f(x) интегрируема в собственном смысле на любом отрезке [a,b] ⊆[a,∞). Тогда выражение , если оно существует и конечно, называется несобственным интегралом 1 рода.

**Опр** Пусть функция f(x) интегрируема в собственном смысле на любом отрезке [a,b-ε] ⊆[a,b]. Тогда выражение , если оно существует и конечно, называется несобственным интегралом 2 рода.

Для исследования сходимости несобственных интегралов можно использовать следующие теоремы.

**Критерий Коши**

Пусть  - несобственный интеграл первого рода, сходится тогда и только тогда, когда для.

**Признаки сравнения**

**1 Признак** Пусть функции f(x) и g(x) определены на [a,∞) и таковы, что ⎢f(x)⎢≤g(x), тогда

а) из сходимости несобственного интеграла  следует сходимость несобственного интеграла .

б) из расходимости несобственного интеграласледует расходимость несобственного интеграла .

**2 Признак** Пусть функции *f(x)* и *g(x)* определены на [a,∞) и таковы, что , тогда несобственные интегралы и сходятся или расходятся одновременно.

**Признак Дирихле-Абеля** Пусть функции *f(x)* и *g(x)* определены на *[a,∞),* функция *f(x)* имеет ограниченную первообразную на этом множестве, функция *g(x)* монотонно стремится к нулю при *x* стремящемся к бесконечности. Тогда несобственный интеграл  сходится.

Замечание. Признак Дирихле-Абеля дает только **достаточные** условия сходимости.

**Примеры исследования несобственных интегралов на сходимость**

**Пример 1** Исследовать на сходимость . Вычислим интеграл по определению: .

Таким образом, данный интеграл сходится при α>1 и расходится при α≤1.

**Пример 2** Исследовать на сходимость . Вычислим интеграл по определению: .

Таким образом, данный интеграл сходится при α<1 и расходится при α≥1.

**Пример 3** Исследовать на сходимость .

Подынтегральная функция может быть бесконечно большой ( если m<0) при x стремящемся к 0, поэтому разобьем исходный интеграл на два

.

Сходимость первого интеграла I1 исследуем с помощью эквивалентной функции:  ( т.к. n>0), а интеграл сходится при m>-1 (пример 2). Аналогично, для интеграла I2  :

, а интеграл сходится при m+n<-1 (пример2). Следовательно, исходный интеграл сходится при выполнении одновременно двух условий m>-1 и m+n<-1, и будет расходится при нарушении хотя бы одного из них.

**Пример 4** Исследовать на сходимость .

Подынтегральная функция может быть бесконечно большой ( если m<0) при x стремящемся к 0, поэтому разобьем исходный интеграл на два:

.

Так как arctgx ≈x при x→0, то интеграл I1 эквивалентен интегралу , который сходится при m+1>-1 т.е. при m>-2 (пример1).

Для подынтегральная функции в несобственном интеграле первого рода I2 подберем эквивалентную:

 т.к. arctgx ≈ π/2 при x→ ∞. Следовательно, по второму признаку сравнения интеграл I2 будет сходится при m+n<-1, и расходится в противном случае.

Объединяя условия сходимости интегралов I1 и I2  получим условия сходимости исходного интеграла: m>-2 и m+n<-1 одновременно.

Замечание. В примерах 2-4 использовался 2 признак сравнения, который обеспечивает необходимые и достаточные условия сходимости, что позволяет, установив сходимость при некотором условии на значения параметров, не доказывать расходимость интеграла при нарушении полученных условий сходимости.

**Пример 5**  Исследовать на сходимость .

Данный интеграл содержит особую точку 0, в которой подынтегральная функция может обращается в бесконечность при p<0, поэтому снова разобьем исходный интеграл на два:

.

Интеграл I1 является несобственным интегралом второго рода, и подынтегральная функция эквивалентна при x→0 функции xp (e-x →1 при x→0), т.е. I1 сходится при p>-1 (пример 1).

Интеграл I2 является несобственным интегралом первого рода. Подобрать функцию, эквивалентную подынтегральной функции, такую, чтобы она не содержала показательной функции, не удается. Поэтому использовать признак сравнения 2, как в предыдущих примерах, нельзя . Применим первый признак сравнения, для чего используем следующий известный факт:

при α>0 и любом p. Из этого, и того, что функция xpe-αx непрерывна, следует, что эта функция ограничена, т.е. существует такая константа M>0, что xpe-αx < M. Возьмем, например, α=1/2, и оценим интеграл I2 сверху:

,

т.е. интеграл I2 сходится при любом p.

Таким образом, исходный интеграл сходится при p>-1.

**Пример 6**  Исследовать на сходимость .

Проведем замену переменной: t = lnx, и получим

.

Разбиение интеграла на два произведено аналогично примеру 5. Интеграл I1 полностью эквивалентен интегралу I1 из примера 5 и, следовательно, сходится при q<1.

Рассмотрим интеграл I2 . При условии 1-p<0 этот интеграл полностью эквивалентен интегралу I2  в примере 5 (доказательство сходимости аналогично, а условие 1-p<0 нужно для выполнения  и α=(1-p)/2. ).

Итак, I2 сходится при p>1. Однако, на этом исследование сходимости этого интеграла не закончено, так как использованный признак сходимости дает только достаточные условия сходимости. Поэтому нужно исследование сходимости при 1-p≤0.

Рассмотрим случай p=1. Тогда интеграл I2 эквивалентен , который сходится при q>1 (заметим, что в этом случае интеграл I1 расходится) и расходится в противном случае.

При p<1 оценим интеграл I2 и покажем его расходимость. Для этого вспомним, что при 1-p>0, и, следовательно, начиная с некоторого А>1 выполнено *t-qe(1-p)t* ≥ M=const>0. Тогда для интеграла I2 справедлива оценка

,

где интеграл в правой части расходится, что и доказывает расходимость интеграла I2 .

Суммируя полученные результаты, получаем что исходный интеграл сходится при q<1 и p>1, в противном случае интеграл расходится.

**Пример 6**  Исследовать на абсолютную и условную сходимость .

Разобьем исходный интеграл на два:

.

Сходимость. Интеграл I1 эквивалентен , т.е. сходится при p<2 (пример 1) , причем абсолютно, так как подынтегральная функция положительна на отрезке интегрирования.

Интеграл I2 сходится про признаку Дирихле-Абеля при p>0 т.к. первообразная sin(x) ограничена, а функция 1/xp  монотонно стремится к нулю при x стремящемся к бесконечности.

Покажем, что при p≤0 интеграл расходится. Воспользуемся для этого критерием Коши, а точнее его отрицанием

.

Возьмем в качестве R1и R2 следующие величины: R1=2πk и R2=2πk+π/2, тогда

, при p>0.

Таким образом, интеграл сходится при 0<p<1.

Абсолютная сходимость Абсолютная сходимость интеграла I1 уже установлена, рассмотрим абсолютную сходимость I2 . Оценим интеграл сверху:

, т.е. интеграл сходится при p>1.

Для доказательства расходимости при p≤1 оценим интеграл снизу

.

Разобьем последний интеграл от разности функций на разность интегралов

.

Если оба интеграла сходятся, то и интеграл от разности сходится, если один из интегралов расходится, а другой сходится - то интеграл от разности расходится. В случае расходимости обоих интегралов сходимость интеграла от разности подлежит дальнейшему исследованию. Нас интересует второй из описанных случаев.

 расходится (пример 1) при p<1.  сходится по признаку Дирихле-Абеля при 1>p>0 (см. Сходимость), следовательно интеграл  оценивается снизу расходящимся интегралом, т.е. расходится.

Случай p≥1 нас не интересует, т.к. при этих значениях параметра интеграл  расходится.

Таким образом, исходный интеграл сходится абсолютно при 0<p<1, сходится условно при 1≤p<2.